

## Programme SEMAINE 2

### – Révisions de première année –

- connaître la formes générale des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 ou 2 (au programme de 1ère année).
- connaître la formes générale des suites récurrentes linéaires d'ordre 1 (suites arithmético-géométriques) ou d'ordre 2.
- PYTHON : listes, suites, sommes, représentation graphique.

### – Suites récurrentes et implicites –

- connaître les méthodes permettant d'étudier une suite récurrente  $\rightsquigarrow$  méthodes du cours 1 à 4.
- connaître les méthodes permettant d'étudier une suite implicite  $\rightsquigarrow$  méthodes du cours 5 à 7.

### – Etude asymptotique des suites et applications aux séries –

**- Etude asymptotique des suites :** caractérisation de la relation de négligeabilité  $u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \rightarrow 0$ , opérations autorisées, reformulation des croissances comparées :  $(\ln(n))^b = o(n^a)$  et  $n^a = o(e^{cn})$  avec  $a, b, c > 0$ , caractérisation de la relation d'équivalence  $u_n \sim v_n \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$ , équivalents usuels (avec  $u_n \rightarrow 0$ )  $\ln(1 + u_n) \sim u_n$ ,  $e^{u_n} - 1 \sim u_n$  et  $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$ , opérations autorisées, équivalent de suites polynômiales, équivalents et applications aux limites, lien entre les deux notions  $u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$ .

$\rightsquigarrow$  savoir classer des suites par ordre de négligeabilité en revenant à la caractérisation ou en références aux croissances comparées.

$\rightsquigarrow$  savoir déterminer un équivalent simple d'une suite en utilisant les opérations autorisées, les équivalents usuels et la propriété clé  $u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$ .

**- Application aux séries numériques :** suite des sommes partielles, série convergente, somme d'une série convergente, série divergente, propriété de linéarité de la somme, condition nécessaire de convergence, séries télescopiques, séries de Riemann, séries géométriques, séries exponentielles, séries à termes positifs (STP), la suite des sommes partielles d'une STP est croissante, critère de comparaison, critère de négligeabilité, critère d'équivalence, série absolument convergente (CVA), **CVA  $\Rightarrow$  CV**.

$\rightsquigarrow$  Savoir déterminer étudier la nature d'une série en étudiant sa suite des sommes partielles.

$\rightsquigarrow$  Savoir démontrer la convergence d'une série en se ramenant à une combinaison linéaire de séries de référence, et calculer sa somme.

$\rightsquigarrow$  Savoir déterminer la nature d'une série en utilisant l'un des trois critères de convergence des STP, et ne pas chercher à calculer la somme.

$\rightsquigarrow$  Savoir démontrer la convergence d'une série en montrant qu'elle converge absolument.

#### Quelques exercices intéressants :

1. Montrer que  $n^2 - \sqrt{n} + \ln(n)e^{1/n} \sim n^2$ .
2. Démontrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^n = 1$ .
3. Déterminer un équivalent de  $u_n$  sachant que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln(n) + \frac{1}{n} \leq u_n \leq \ln(n) + 1$ .
4. Etudier la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + 1}$  par équivalence et  $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{e^n}$  par comparaison.
5. Montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{2^n}$  converge et déterminer sa somme.
6. Soit  $\sum_n u_n$  une STP telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{u_n} \geq 3^n$ . Montrer que la série converge et que  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ .